



## Uvođenje računarskih algebarskih sistema u obrazovanju računarskih nauka Wolfram jezikom na Raspberry pi

Vladimir Mladenović<sup>1</sup>, Miroslav Lutovac<sup>2</sup> i Sergej Makov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Fakultet tehničkih nauka u Čačku, Svetog Save 65, 32000 Čačak, Srbija

<sup>2</sup> Univerzitet Singidunum, Danijelova 32, 11000 Beograd, Srbija

<sup>3</sup> Don State Technical University, Shakhty, Rostov Region, Russian Federation

e-mail [vladimir.mladenovic@ftn.kg.ac.rs](mailto:vladimir.mladenovic@ftn.kg.ac.rs); [lutovac@gmail.com](mailto:lutovac@gmail.com); [makovserg@yandex.ru](mailto:makovserg@yandex.ru)

**Rezime:** Ovaj rad uvodi inovativno korišćenje simboličkog izračunavanja u oblasti računarskih nauka na jeftinim računarima Raspberry pi sa besplatnim softverom kroz obrazovanje i inženjersko projektovanje. Prikazan je nov način za sticanje osnovnih znanja u oblastima rešavanja električnih kola korišćenjem simboličkih alata primenom računarskih algebarskih sistema. Kao primer bržeg učenja prikazana je analiza i rešavanje prelaznih režima kod električnih kola. Za tako nešto potrebno je dobro poznavanje diferencijalnih jednačina i postavljanje početnih uslova pasivnih elemenata u kolu na kalemovima i/ili kondenzatorima. Rešavanja nekada mogu biti iscrpljujuća kada se rade ručno, a kod složenih kola skoro nemoguća. Mnogi softveri zasnovani na numeričkim alatima mogu da obezbede samo grafičku interpretaciju prelaznih režima, ali ne mogu da daju analitički rezultat u zatvorenom obliku. Nova metodologija obezbeđuje način da studenti mogu brže da nauče rešavanje elektrinih kola kod prelaznih režima, a inženjeri da dobiju bolji uvid u procese koji su pokrenuti.

**Ključne reči:** simboličko izračunavanje, računarski algebarski system, prelazni režim, softverski alati

### 1. UVOD

Tradicionalno, za uspešno savladavanje gradiva iz oblasti računarskih i inženjerskih nauka potrebno je odlično znanje iz matematike. Posebno je potrebno znati rešavanje integrala, sistema linearnih jednačina, kompleksnih brojeva i diferencijalnih jednačina. Oni koji je uče misle da je gradivo nepovezano, teško i nezanimljivo. Oni koji pokušavaju da ih zaposle misle da ne znaju dovoljno. Nastavnici stalno teže da unaprede metodologije za izučavanje primene matematike u svojim oblastima. Ipak korišćenje matematike je bitnije svetu nego u bilo kom momentu u ljudskoj istoriji. Tako sa jedne strane imamo pad interesovanja u obrazovanju u kome se primenjuje matematika, a sa druge strane imamo više matematički svet, više kvantitativni svet, nego ikada. Danas postoje brojni matematički softverski alati, kao što su Matlab i Mathematica, koje studenti i inženjeri računarskih nauka mogu da koriste za rešavanje složenih matematičkih problema [1], [2]. Umesto da se studenti iscrpljuju na sticanju rutina u rešavanju matematičkih problema, često se

podučavaju osnovnim teorijskim postavkama i objašnjava im se kako da to znanje iskoriste u postavljanju problema sa kojima mogu da se sretnu u praksi. Iako se tradicionalna usmerenja, kao što su elektronika, telekomunikacije, energetika i automatika, zasnivaju na hardverskim rešenjima i komponentistici, potrebe kompanija koje zapošljavaju inženjere su pre svega u oblasti programabilnog hardvera i primene računara. Stoga se teži da bazični predmeti budu prilagođeni za uspešno ovladavanje znanjima neophodnim za kompetencije inženjera. Iz navedenih činjenica ovaj rad uvodi metodologiju kako da studenti primene softver zasnovan na matematici u brzem i dubljem razumevanju i rešavanju električnih kola, a da pri tom nemaju visok nivo matematičkog znanja. Oslanjajući se na klasični metodološki pristup u učenju i primeni matematičkih alata u inženjerskim naukama, izdvajaju se četiri faze u savladavanju metodologije [3], [4]. Prva predstavlja postavljanje formulacije problema. Druga obuhvata prebacivanje postavke iz pozicije problema stvarnog sveta u matematički problem. Nakon toga sledi treća faza, i to je računanje. I na kraju, dobijeni odgovor u matematičkoj formi treba vratiti u realni svet. Treći korak troši najveći deo vremena učeći studente da to ručno rade. Ipak, to je korak koji računari mogu da rade bolje nego bilo koji čovek čak i posle mnogo godina prakse. Umesto toga, potrebno je koristiti računare za ovaj treći korak i naterati studente da se više trude oko učenja prvog, drugog i četvrtog koraka - konceptualizovanja problema, njihove primene, i naterati nastavnika da ih nauči tome. U tom smislu, u poslednje vreme na tržištu se pojavila varijanta jeftinog računara Raspberry Pi [5]. Njegove performanse zadovoljavaju karakteristike jednog prosečnog PC-a i omogućavaju dostupnost svakom korisniku. Na njemu je instaliran besplatan softver, kao i softverski paket Mathematica u kome se nalazi jedan od najboljih programskih jezika za simboličko izračunavanje – Wolfram jezik [1]. Sve zajedno, i Raspberry pi i operativni sistem i Wolfram jezik implementirani u jednu celinu čineći je integrisanim računarskim algebarskim sistemom. Do sada su računarski algebarski sistemi obuhvatali isključivo softversku podršku na čijoj platformi su se koristili matematički alati. Sada to postaje neraskidivi deo hardvera, naročito kod navedenih jeftinih računara sa besplatnim softverom.

## 2. MODELOVANJE ELEKTRIČNIH ELEMENATA I SISTEMA

Za analiziranje osobina elementa ili sistema, često se koriste matematički modeli. Modelovanje je proces predstavljanja fizičkog elementa ili sistema na način koji omogućava primenu matematičkih izraza [6]. Uprošćavanje modela se izvodi usvajanjem određenih pretpostavki kojima se ne utiče na bitna svojstva elementa, a sama analiza daje dovoljno dobre rezultate koji prikazuju suštinu i najvažnije osobine [7]. Električno kolo predstavlja vezu dva ili više elemenata. Povezivanje elemenata se vrši provodnicima. Otpornost provodnika koji se koristi za kratak spoj, može se zanemariti. Čvor kola pokazuje da su dve veze kratko spojene i predstavlja tačku spajanja dve grane i dva ili više elemenata kola. Petlja predstavlja bilo koji zatvoreni put kroz kolo tako da se kroz jedan čvor može proći samo jednom. Termin kontura se koristi za petlju koja ne sadrži u sebi ni jednu drugu petlju.

### 2.1. Kola sa promenljivim strujama

U električnim kolima često dolazi do potrebe da se promene veze između elemenata, što se može modelovati otvaranjem ili zatvaranjem prekidača u kolu. Teorijski, analiza kola podrazumeva da je pojava poznata od beskonačnosti do posmatranog trenutka, na primer ako se element modeluje integralom. Da bi se izbegao previše komplikovan matematički

aparata, pojave u kolima se modeluju od određenog trenutka, i to se predstavlja uključivanjem prekidača kojim se neki element povezuje u kolo i od tog trenutka se posmatra šta se dešava sa naponima i strujama u kolu. Praktičan značaj imaju pojave koje se dešavaju od trenutka promene, a sve dok svi naponi i struje prestanu da se menjaju, tj. dostignu vrednost koja je praktično nepromenljiva. Ova rad uvodi novi pristup u rešavanju električnih kola sa prelaznim režimima korišćenjem matematičkim modelima koji se zasnivaju na trenutnim promenama. U praksi se ove promene postepeno menjaju iz jedne vrednosti u drugu [8], [9].

Ovakva analiza značajno olakšava izračunavanja, a suština promene koje se dešavaju još uvek su dovoljno tačne. U analizi prelaznih pojava, dva pasivna elementa, kondenzator i kalem, imaju zavisnost napona i struje koje su srazmerne izvodu i integralu, dok treći element – otpornik – ima konstantnu vezu između napona i struje. Sva tri elementa su linearna jer kod njih relacija između struje i napona predstavljena linearnim diferencijalnim jednačinama.

## 2.2. Diferencijalna jednačina drugog reda

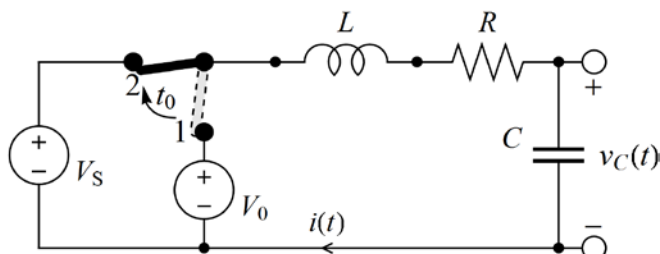
Za uspešno rešavanje napona i struja električnih kola sa jednim otpornikom, jednim kondenzatorom i jednim kalemom u situacijama kada dolazi do promene napona ili struje nezavisnih izvora, potrebno je poznavanje matematičkog rešavanja diferencijalne jednačine drugog reda. Podrazumeva se da diferencijalna jednačina drugog reda ima konstantne koeficijente:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t) \quad (1)$$

U opštem slučaju treba pronaći sva rešenja prethodne jednačine  $x(t)$ . Promenljiva veličina se može predstaviti zbirom dva rešenja, od kojih se jedno naziva prinudno rešenje, a drugo prirodno rešenje. Koeficijenti  $a_1$  i  $a_2$  su konstante a funkcija  $f(t)$  može biti bilo koja funkcija vremena. Za struje i napone u prelaznom režimu, funkcija  $f(t)$  je konstanta a može biti i jednaka nuli. Za oba rešenja potrebno je sprovesti određeni broj koraka i na kraju napisati konačno rešenje na osnovu analize karakterističnih slučajeva.

## 3. REDNA VEZA KALEMA, OTPORNIKA I KONDENZATORA

Kada su kondenzator i kalem istovremeno prisutni u kolu, dobija se složenije kolo. To su električna kola sačinjena od izvora, otpornika, kondenzatora i kalemova. Posmatrajmo sada kolo na slici 1. Ovo kolo predstavlja rednu vezu naponskog izvora, kalema, otpornika i kondenzatora. U trenutku  $t_0$  dolazi do promene položaja prekidača, tako da se promeni vrednost jednosmernog naponskog izvora. Do trenutka  $t_0$  proteklo je dovoljno vremena da je ostvareno stabilno stanje i da više nema promena napona ili struja u kolu. Pošto je kondenzator redno vezan sa ostalim elementima, struja kroz sve elemente je jednaka nuli. Kako je tada napon na otporniku i kalemu jednak nuli, napon na kondenzatoru biće jednak naponu koji daje nezavisni izvor. Prema tome, početna vrednost struje kalema je jednaka nuli, a početna vrednost napona na kondenzatoru je  $V_0$ . U trenutku  $t_0$  prekidač se prebacuje iz položaja 1 u položaj 2, i tada se otpornik i kalem nalaze između dva čvora na različitom potencijalu: sa jedne strane to je napon novog naponskog izvora, a sa druge strane to je napon na kondenzatoru koji ne može trenutno da promeni vrednost napona i struje. Takođe, struja kroz kalem, a to je struja kroz sve elemente, ne može trenutno da se promeni.



**Slika 1.** Kolo drugog reda sa rednom vezom kalema, otpornika i kondenzatora.

Rešavanje prelaznog režima u navedenom slučaju obavlja se pisanjem opšteg oblika diferencijalne jednačine u Wolfram jeziku. U ovom slučaju simbol  $x$  predstavlja struju kroz sve elemente kola primenjujući jednačinu (1). Uglaste zagrade, `[ ]`, se koriste da se istakne nezavisno promenljiva, u ovom slučaju to je vreme  $t$ . Oznaka  $f$  je bilo koja funkcija, a u ovoj analizi ona je konstanta ili još češće jednaka je nuli. Prvi i drugi izvod ( $'$  i  $''$ ) se označavaju apostrofima odmah posle simbola za funkciju vremena  $x$ . Blanko znak između izraza se koristi umesto znaka za množenje, dvostruka jednakost (`==`) se koristi da se istakne da je leva strana jednaka desnoj, a samo jedan znak jednakosti (`=`) se koristi za dodeljivanje nekog izraza nekom simbolu – u ovom slučaju to je `eq1`, kome se dodeljuje ceo izraz koji opisuje diferencijalnu jednačinu:

$$\text{eq1} = x''[t] + a1 x'[t] + a2 x[t] == f$$

Konstante ( $a1$  i  $a2$ ) u jednačini se dodeljuju u skladu sa postavljenim jednačinama:

$$a1 = r/L;$$

$$a2 = 1/(L c);$$

Otpornost, induktivnost i kapacitivnost su opisani simbolima  $r$ ,  $L$  i  $c$ . Početni uslov  $x[0]$  je dodeljen simbolu `cond1`.

$$\text{cond1} = x[0] == 0;$$

Komanda koja pronalazi rešenje diferencijalne jednačine je `DSolve`. Argumenti ove komande su simboli koji sadrže opis diferencijalne funkcije `eq1`, početne uslove ako su poznati `cond1`, simbolička oznaka za funkciju koja se dobija rešavanjem diferencijalne jednačine  $x[t]$ , i simbol za nezavisno promenljivu  $t$ :

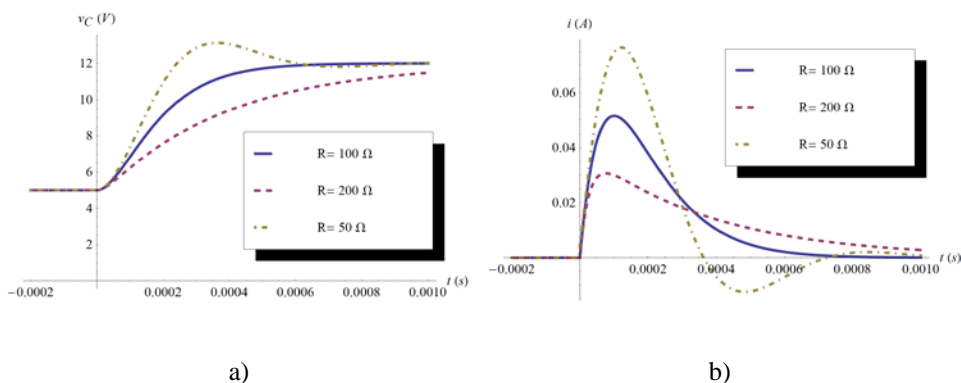
$$\text{DSolve}\{\text{eq1}, \text{cond1}\}, x[t], t$$

U ovom primeru rešenje će sadržati još jednu neodređenu konstantu definisanu kao simbol `C[1]`. Da bi to odredilo najpre se izvrši integracija struje po formuli za napon kondenzatora, odredi limes kada nezavisno promenljiva teži beskonačnosti. Izjednačavanjem limesa sa vrednošću napona kondenzatora kada prestanu promene u kolu lako se određuje nepoznata konstanta `C[1]`. Za sva tri slučaja softver određuje simboličko rešenje, gde su u ovom primeru  $L=5$  mH,  $C=2$   $\mu$ F,  $R=100$   $\Omega$  za kritično prigušeno rešenje ( $R=200$   $\Omega$  za prigušeno rešenje,  $R=50$   $\Omega$  za neprigušeno rešenje),  $V_S=12$  V,  $V_0=5$  V. Odziv

u zatvorenom obliku u Wolfram jeziku prikazan je na sledeći način:

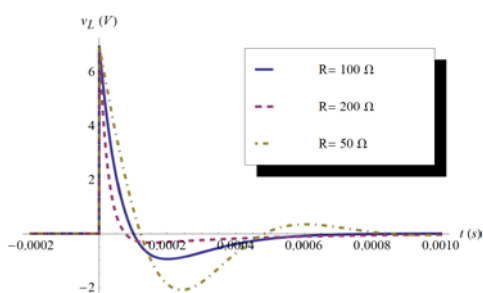
$$\{1400 e^{(-10000 t)} t\}$$

Na slici 2a) prikazana je promena napona na kondenzatoru, a na slici 2b) struja koja teče kroz sve elemente kola. Struja do trenutka promene položaja prekidača je bila jednaka nuli, a takođe se struja asimptotski približava nuli. Struja je približno jednaka nuli već posle 1 ms. Vidi se da neprigušeno rešenje ima oscilatorni karakter, a da se najbrže približava nuli kada je vrednost otpornosti jednaka kritično prigušenom uslovu.



**Slika 2.** Napon na kondenzatoru a) i struja kroz elemente kola b) za  $C=2 \mu F$ ,  $L=2mH$ ,  $V_S=12V$ ,  $V_0=5V$ .

Napon na kalemu može da se odredi kada se od napona naponskog izvora oduzmu naponi na otporniku i kondenzatoru. Za rešavanje ovakvih problema dovoljno znati osnovne zakone elektrotehnike (Omov zakon, prvi Kirhofov zakon, drugi Kirhofov zakon, izraze koji određuju vezu između napona i struje svih pasivnih elemenata), stabilno stanje kada nema promena napona i struja u kolima (kalem se zamenjuje kratkom vezom, kondenzator se zamenjuje otvorenom vezom).



**Slika 3.** Napon na kalemu za kondenzatoru a) i struja kroz elemente kola b) za  $C=2 \mu F$ ,  $L=2mH$ ,  $V_S=12V$ ,  $V_0=5V$ .

Diferencijalnu jednačinu treba uneti na način kako je to urađeno u ovom primeru, a softver će naći rešenje u zatvorenom obliku kao da je izvođenje sprovedeno ručno (softver će odrediti koji od tri slučaja se stvarno dešava). Sve slike u ovom radu su upravo i nacrtane na osnovu navedenih izraza softvera.

#### 4. ZAKLJUČAK

Primena novih tehnologija u obrazovanju ima za cilj da ubrza proces učenja. To je naročito važno u inženjerskim naukama zbog velikih potreba privrede u informacionim tehnologijama za brzo dobijanje stručnjaka. S tim u vezi, nastava matematike treba da bude, što je moguće više, organizovana tako da osposobi studente za što dublje i što brže razumevanje inženjerskih nauka. Za postizanje tog cilja potrebno je razvijati racionalno mišljenje kod studenata u maksimalno mogućoj meri, imajući u vidu njihova predznanja i mogućnosti. Ovaj rad uvodi korišćenje simboličkog izračunavanja u oblasti računarskih nauka na jeftinim računarima Raspberry pi sa besplatnim softverom. Prikazan je nov način za sticanje osnovnih znanja u oblastima rešavanja električnih kola korišćenjem simboličkih alata primenom računarskih algebarskih sistema. Kao primer bržeg učenja prikazana je analiza i rešavanje prelaznih režima kod električnih kola. Ilustracija pisanja jednačina u softverskom paketu Mathematica koristeći Wolfram jezik za pisanje kôda preskače deo izračunavanja koji oduzima najviše vremena. Na taj način omogućava se studentu da brže dobije gotova rešenja.

#### LITERATURA

- [1] Wolfram, S. (2015), *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*, Wolfram Media, Inc
- [2] Nehra V, Tyagi A. (2014), *Free open source software in electronics engineering education: a survey*, I.J. Modern Education and Computer Science, 2014, 5: 15-25
- [3] Froyd J E, Wankat P C, Smith K A. (2012), *Five major shifts in 100 years of engineering education*, Proceedings of the IEEE, 100: 1344-1360
- [4] Hambley, A. R. (2011), *Electrical Engineering, Principles and Applications*, Upper Saddle River: Prentice Hall
- [5] Upton E, Halfacree G. (2013), *Raspberry Pi User Guide*, West Sussex: John Wiley & Sons
- [6] Guzdial, M., DiSalvo, B. (2013), *Computing Education: Beyond the Classroom*, Computer, 46(9), 30-31
- [7] Patrick D R, Fardo S. W. (2008), *Electricity and electronics fundamentals*, 2<sup>nd</sup> Edition, The CRC press
- [8] Lutovac, M., Mladenovic, V. (2015), *Contemporary Electronics with LTSpice and Mathematica*, The International Scientific Conference of IT and Business-Related Research
- [9] Agarwal, A., Lang, J. H. (2005), *Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits*, Amsterdam: Elsevier